Les systèmes linéaires

Exercices résolus

Exercice 01 : m étant un paramètre réel, résoudre le système :

S(m) = $\begin{cases} (m-1)x + y - z = m \\ 2x + my + z = 3 \\ mx + (1-m)y + mz = m^2 \end{cases}$;

Dans les cas si, le système n'est pas de Grammer

Réponse 01 :

Le système S(m) n'est pas de Grammer si son déterminant est égal à zéro

Or : det(S(m))=$m^3+m^2-m-1=(m^2-1)(m+1)=0$ ssi m=1 ou m=-1

Pour m=1

S(1) $\begin{cases} y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 1 - x \end{cases}$

Ce qui donne une infinité de solution : S=$\{(x, 2-x, 1-x), x \in \mathbb{R}\}$

Pour m=-1

S(-1)$\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$,les deux premières équations donnent :(-1)=(-3), ce qui est impossible alors : S=∅

Ainsi, le système S (-1) n'a pas de solution.

Exercice 02 : Par la méthode de Gauss (du Pivot) résoudre les systèmes suivants :

S(1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$; $S(2)\begin{cases} x - 2y + t = 1 \\ x - y - z + 4t = 1 \\ x - 3y + z - 2t = 1 \end{cases}$; $S(3)\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 2x + 3y + 4z + t = 2 \\ 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 4x + y + 2z + 3t = 4 \end{cases}$

Réponse 02

Rappel : L_1 c'est la ligne 1 ; L_2 c'est la ligne 2, ….

Résolution de S(1) :

Etape1 :$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$

On aura : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=1 \\ y+2z=2 \end{cases}$

Etape 2 : $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$ on aura $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=1 \\ z=1 \end{cases}$

Directement la solution S=$\{(0,0,1)\}$

Résolution de S(2) :

Etape 1 : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$

Etape 3 : $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$

le système final sera : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=1 \\ 0=1 \end{cases}$ ce qui est impossible

Donc : S=∅

Résolution de S(2) :

Etape 1 : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ on aura : $\begin{cases} x-2y+t=1 \\ y-z+3t=0 \\ -y+z-3t=0 \end{cases}$

En remarquant que L_3 estL_1 sont identiques, le système devient :

$\begin{cases} x-2y+t=1 \\ y-z+3t=0 \end{cases}$, qu'on peut 2crire : $\begin{cases} x=1+2y-t \\ y=z-3t \end{cases}$ cad : $\begin{cases} x=1+2(z-3t)-t \\ y=z-3t \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} x=1+2z-7t \\ y=z-3t \end{cases}$;

S=$\{(1+2z-7t, z-3t, z, t), t, z \in \mathbb{R}\}$qui est une infinité de solutions.

Résolution de S(3) :

Etape 1 : $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$, $L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_1$

Etape 2 : $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$, $L_4 \longleftarrow L_4 - 7L_2$

Etape 3 : $L_4 \longleftarrow L_4 + L_3$

Le système sera : $\begin{cases} x+2y+3z+4t=1 \\ -y-2z-7t=0 \\ -4z+4t=0 \\ 40t=0 \end{cases}$

La solution est S=$\{(1,0,0,0)\}$.

Exercice 03 : Soit le système linéaire (S) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\beta z=3 \\ x+\beta y+3z=-3 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1-aucune solution ;

2-une solution unique ;

3-une infinité de solution.

Réponse 03 :

Après les étapes suivante :

Etape 1 :$L_2 \longleftarrow L_2-2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$

Etape 2 :$L_3 \longleftarrow L_3+(1-\beta)L_2$

Le système final est : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(\beta+2)z=1 \\ (2-\beta)(3+\beta)z=-(3+\beta) \end{cases}$

Donc :

1-le système (S) ne possède aucune solution si et seulement si $\beta=2$;

Indication : il suffit de remplacer β par 2 dans le système final

2-le système (S) possède une solution unique si et seulement $\beta \neq 2$ et$\beta \neq -3$;

S=$\left\{\left(x=\frac{\beta+3}{\beta-2}, y=\frac{-4}{\beta-2}, z=\frac{1}{\beta-2}\right), \beta \in \mathbb{R}\right\}$

3-le système (S) possède une infinité de solution si et seulement si $\beta=-3$;

Indication : il suffit de remplacer β par (-3)

Ainsi : S =$\{(0,1+z,z)\ z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 04 : Calculer A^{-1} telle que A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse 04 : La matrice élargie est :$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle$

Faisons les changements suivants :

Etape 1 : $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$;

Etape 2 : $L_3 \longleftarrow (-1)L_3$;

Etape 3 : $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3$.

Finalement on aura : $\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right\rangle$

Donc la matrice inverse est $A^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.